BILAGA C: TANKSERIEMODELLEN

Uppehållstidsfördelning för tankseriemodellen

Antag att vi gör ett spårämnesförsök genom att tillsätta en puls av ett spårämne till den första tanken i en serie av totalomrörda tankar. Vi tillsätter spårämnet vid tiden, t=0. Koncentrationen i tanken vid den tidpunkten är C_0. Koncentrationen av spårämnet i utflödet från tank 1 (C_1) kan man räkna ut med en massbalans (ekv 1).

$$\frac{dC_1}{dt} \cdot V = Q \cdot C_{in} - Q \cdot C_1 \qquad \text{(ekv 1)}$$

V är tankvolymen (m^3), Q är flödet (m^3/s), C_{in} är koncentrationen av spårämnet i inflödet och C_1 är koncentrationen i tank 1.

Eftersom spårämnet tillsattes som en puls är $C_{in} = 0$. Notera att V/Q är lika med den hydrauliska uppehållstiden i tanken, θ_i. Alltså kan massbalansen förenklas (ekv 2).

$$\frac{dC_1}{dt} = -\left(\frac{1}{\theta_i}\right) \cdot C_1 \qquad \text{(ekv 2)}$$

Om man löser differentialekvationen får man ett uttryck för C_1 som en funktion av t (ekv 3).

$$C_1(t) = C_0 \cdot e^{-t/\theta_i} \qquad \text{(ekv 3)}$$

C_0 är koncentrationen av spårämnet i tank 1 precis när det tillsattes vid t=0.

För att bestämma koncentration ut från tank 2 (C_2) skriver vi en massbalans för den tanken (ekv 4).

$$\frac{dC_2}{dt} \cdot V = Q \cdot C_1 - Q \cdot C_2 \qquad \text{(ekv 4)}$$

Ekv 4 kan skrivas om till ekv 5.

$$\frac{dC_2}{dt} + \frac{C_2}{\theta_i} = \frac{C_0}{\theta_i} \cdot e^{-t/\theta_i} \qquad \text{(ekv 5)}$$

Den här differentialekvationen har den generella formen y'(x)+P(x)·y=Q(x), vilken kan lösas med hjälp av en integreringsfaktor. Med integreringsfaktorn $e^{t/\theta}$ blir en generella lösningen (ekv 6):

$$C_2(t) = e^{-\frac{t}{\theta_i}} \cdot \left(\frac{C_0 \cdot t}{\theta_i} + K\right) \qquad \text{(ekv 6)}$$

Vi vet att C_2=0 vid tidpunkten t=0. Det betyder att konstanten, K=0. Alltså blir lösningen (ekv 7):

$$C_2(t) = \frac{C_0 \cdot t}{\theta_i} \cdot e^{-\frac{t}{\theta_i}} \qquad \text{(ekv 7)}$$

För att bestämma koncentrationen ut från tank 3 (C_3) gör vi på samma sätt igen. Massbalansen ger ekv 8.

$$\frac{dC_3}{dt} \cdot V = Q \cdot C_2 - Q \cdot C_3 \qquad \text{(ekv 8)}$$

Ekv 8 kan skrivas om till ekv 9.

$$\frac{dC_3}{dt} + \frac{C_3}{\theta_i} = \frac{C_0 \cdot t}{\theta_i^2} \cdot e^{-t/\theta_i} \qquad \text{(ekv 9)}$$

Vi löser ekvationen på samma sätt som för tank 2 (ekv 10). Även i detta fallet vet vi att $C_3(0) = 0$.

$$C_3(t) = \frac{C_0 \cdot t^2}{2 \cdot \theta_i^2} \cdot e^{-\frac{t}{\theta_i}} \qquad \text{(ekv 10)}$$

För fler tankar i serie fortsätter det enligt samma mönster. Den generella lösningen för koncentrationen ut från tank N i en serie blir ekv 11a.

$$C_n(t) = \frac{C_0 \cdot t^{N-1}}{(N-1)! \cdot \theta_i^{N-1}} \cdot e^{-\frac{t}{\theta_i}} \qquad \text{(ekv 11a)}$$

Notera att θ_i är upphållstiden i en tank medan θ är den totala uppehållstiden för hela tankserien. Eftersom $\theta_i = \theta/N$ kan vi skriva om ekvationen till ekv 11b.

$$C_n(t) = \frac{N^{N-1} \cdot C_0 \cdot t^{N-1}}{(N-1)! \cdot \theta^{N-1}} \cdot e^{-\frac{t \cdot N}{\theta}} \qquad \text{(ekv 11b)}$$

Funktionen E(t) beskriver uppehållstidfördelningen, dvs hur stor fraktion av den totala mängden tillsatt spårämne som passerar genom tankarna vid tiden, t. Om vi tittar på utflödet från den tredje tanken kan E(t) beskrivas med ekv 12.

$$E(t) = \frac{\frac{C_0 \cdot t^2}{2 \cdot \theta^2} \cdot e^{-\frac{t}{\theta_i}}}{\int_0^\infty \left(\frac{C_0 \cdot t^2}{2 \cdot \theta_i^2} \cdot e^{-\frac{t}{\theta_i}} \right) dt} \qquad \text{(ekv 12)}$$

Om vi löser integralen i nämnaren får vi ekv 13.

$$\frac{C_0}{2 \cdot \theta_i^2} \int_0^\infty t^2 \cdot e^{-\frac{t}{\theta_i}} dt = \frac{C_0}{2 \cdot \theta_i^2} \left[\left(e^{-\frac{t}{\theta_i}} \right) \cdot \left(-\theta_i \cdot t^2 - \theta_i^2 \cdot 2 \cdot t - 2 \cdot \theta_i^3 \right) \right]_0^\infty \qquad \text{(ekv 13)}$$

Om vi löser ekvation 13 ser vi att hela uttrycket går mot 0 när $t=\infty$ och $-C_0 \cdot \theta_i$ när $t=0$. Alltså blir lösningen för E(t) ekv 14.

$$E(t) = \frac{\frac{C_0 \cdot t^2}{2 \cdot \theta_i^2} \cdot e^{-\frac{t}{\theta_i}}}{0 + C_0 \cdot \theta_i} \qquad \text{(ekv 14)}$$

Den generella lösningen för E(t) blir ekv 15.

$$E(t) = \frac{t^{N-1}}{(N-1)! \cdot \theta_i^N} \cdot e^{-\frac{t}{\theta_i}} \qquad \text{(ekv 15)}$$

Om vi skriver ekvationen baserat på den totala uppehållstiden i tankserien blir den ekv 16.

$$E(t) = \frac{N^N \cdot t^{N-1}}{(N-1)! \cdot \theta^N} \cdot e^{-\frac{t \cdot N}{\theta}} \qquad \text{(ekv 16)}$$